

На правах рукописи

АБДЮШЕВ АЙДАР АНВАРОВИЧ

ГИБРИДНЫЕ И РАВНОВЕСНЫЕ КОНЕЧНО-ЭЛЕМЕНТНЫЕ МОДЕЛИ
ДЛЯ ПРОЧНОСТНОГО АНАЛИЗА ТОНКОСТЕННЫХ
АВИАЦИОННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

05.07.03 - Прочность и тепловые режимы летательных аппаратов

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата технических наук



Казань 2013

Работа выполнена в федеральном государственном бюджетном образовательном учреждении высшего профессионального образования “Казанский государственный архитектурно-строительный университет” (КГАСУ).

Научный руководитель: кандидат технических наук, доцент
Лукашенко Виктор Иванович

Официальные оппоненты: **Шувалов Владимир Александрович**,
доктор технических наук,
ОАО “Казанский вертолётный завод”,
заместитель главного конструктора ОКБ
Каюмов Рашид Абдулхакович,
доктор физико-математических наук,
профессор, КГАСУ, кафедра сопротивления
материалов, заведующий кафедрой

Ведущая организация: ОАО Казанское научно-производственное
предприятие «Вертолеты МИ+»

Защита состоится «27» декабря 2013 г. в 13.00 часов на заседании диссертационного Совета Д 212.079.05, созданного на базе федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования “Казанский национальный исследовательский технический университет им А.Н. Туполева-КАИ” по адресу: 420111 г. Казань, ул. К. Маркса, 10 (kai@kstu-kai.ru, сайт <http://www.kai.ru>).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования “Казанский национальный исследовательский технический университет им А.Н. Туполева-КАИ”

Автореферат разослан ”____” ноября 2013 г.

Учёный секретарь
диссертационного
совета



Снигирев Виталий Филиппович

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. Надёжность и экономичность в эксплуатации любых конструкций во многом зависит от качества проектирования конструктивно – силовой схемы. Обеспечить надлежащее качество проектирования возможно при удобном и достоверном аппарате анализа всех параметров прочности. Если первое обеспечивается уровнем программно аппаратных средств, то второе – уровнем научных методов и моделей, заложенных в эти средства. Всё это, безусловно, справедливо и при проектировании авиационных конструкций и, в частности, фюзеляжей летательных аппаратов.

Развитие вычислительной техники вывело на первые места численные методы анализа прочности и в том числе Метод Конечных Элементов. Одной из первых работ в области анализа прочности конструкций летательных аппаратов и фюзеляжей в частности являются статьи Дж. Аргириса и С. Келси. Из условия стационарности функционала дополнительной энергии Кастильяно, они разработали и реализовали равновесную конечноэлементную модель, соответствующую инженерной модели Эбнера – Беляева. Достоверность результатов по напряжениям, получаемых по модели Аргириса в форме метода сил, неоднократно подтверждалась расчётами его последователей в нашей стране. Однако вместе с хорошей достоверностью результатов, постановка Аргириса имеет некоторые недостатки. Прежде всего, это определяется ограничениями применимости и определённой сложностью алгоритмов метода сил при реализации. С другой стороны, МКЭ в перемещениях, на базе принципа минимума потенциальной энергии (функционал Лагранжа) обладает достаточно простыми и универсальными алгоритмами при реализации. Основной характеристикой такой модели является совместность перемещений на границе элементов. Однако разрывность полей напряжений вынуждает прилагать дополнительные усилия при пострасчётном анализе напряжённого состояния.

Расчётная система АРС ЭРА-ПК2000 является результатом труда не одного поколения разработчиков. В середине 60-х годов З.И.Бурман начал внедрять в расчётную практику модель Аргириса. В середине 70-х в пакет программ РК-75 на ЭВМ М-220 позволял проводить статические расчёты прочности фюзеляжа по МКЭ в форме метода сил. В конце 70-х в комплексе программ появляется подсистема расчётов по МКЭ в перемещениях. В указанный период в коллектив, возглавляемый З.И.Бурманом, вошёл и автор этой работы. 24 июня 1983 г. приказом МАП СССР и МВ и ССО РСФСР № 255/410 в Казанском инженерно-строительном институте на базе группы НИС кафедры строительной механики была организована Отраслевая Научно-Исследовательская Лаборатория автоматизированных систем проектирования и расчетов на прочность вертолетных конструкций. С момента прихода в коллектив и по настоящее время автор постоянно занимается совершенствованием моделей

и методов анализа конструкций в форме метода перемещений. Принимая во внимание принципы преемственности, полагаем, что актуальной является задача объединения положительных качеств методик, совместных и равновесных моделей при расчёте конструкций фюзеляжа вертолёта.

Необходимо заметить, что основой моделирования рёбер подкреплённых оболочек являются двухузловые КЭ стержней и балок. Для этих элементов, независимо от совместной или равновесной постановки, энергия деформации учитывается точно. Таким образом, основным фактором, отвечающим за качество расчётов, является моделирование работы обшивки.

Цель работы – построить конечные элементы для анализа фюзеляжа вертолёта в виде подкреплённых тонкостенных оболочек в перемещениях и разработать алгоритмы, позволяющие определять усилия в рёбрах, с учётом их взаимодействия с обшивкой, а также реализация этих разработок в рамках расчётного комплекса АРС ЭРА-ПК2000.

Научная новизна работы заключается в построении двух моделей для анализа подкреплённых оболочек МКЭ в перемещениях, при единой базе входных данных. Полученная совместная модель на базе гибридных сдвиговых элементов обшивки с уточнённым алгоритмом статической адаптации приближается к действительному состоянию снизу по полной энергии. Модель с равновесными элементами обшивки приближается к действительному результату сверху. Определена количественно энергетическая дистанция между этими моделями.

Методы исследования. Теоретические результаты получены в результате изучения накопленного опыта исследователей в указанной области. Достоверность результатов на первых этапах контролировалась двойственными расчётами (по методу сил и перемещений) и сопоставлением с экспериментальными данными. В дальнейшем, достоверность обеспечивалась реализацией результатов научного поиска и проверкой на физически понятных тестовых примерах или небольших задачах.

На защиту выносятся:

1. Гибридная матрица жёсткости плоского выпуклого n -угольного КЭ, реализующего чистый сдвиг в декартовой системе координат.
2. Универсальный алгоритм “закрутки” плоских четырехузловых КЭ, построенный на базе метода наименьших квадратов.
3. Набор конечных элементов, моделирующих любые формы изгибаемых шпангоутов.
4. Алгоритм статической адаптации – статически эквивалентного преобразования усилий в рёбрах, предписывающий равновесную работу с обшивкой.
5. Четырёхузловой конечный элемент сдвиговой обшивки, позволяющий учесть равновесие с подкрепляющими рёбрами.

Практическая ценность работы заключена в том, что все предлагаемые разработки реализованы в рамках расчётного комплекса АРС ЭРА-

ПК2000, применённого на этапе проектирования в КБ ОАО "Казанский вертолётный завод". Внедрение разработок повысило достоверность результатов анализа статической и динамической прочности при проектировании.

Внедрение результатов. Разработанные алгоритмы применялись в расчётной практике конструкторских бюро КНПП "Вертолёты МИ" и ОАО "Казанский вертолётный завод".

Апробация работы: Основные результаты работы неоднократно докладывались на ежегодных научно - технических конференциях Казанского государственного архитектурно – строительного университета (КИСИ, КГАСА) в 1982 – 2007 гг. Материалы предложенной работы прошли апробацию на международных конференциях: III Национальной конференции по устойчивости и колебаниям деформируемых систем. – София, НРБ, 1984 г.; XI международный конгресс по вопросам применения математики в технических науках. Веймар, ГДР, 1987 г. В полном объёме работа докладывалась на расширенном семинаре ЛабНМО ИММ КНЦ РАН в октябре 2013 г.

Основное содержание работы изложено в 16 печатных работах. Из них – одна монография и одна публикация из списка рецензируемых изданий, рекомендованных ВАК. Комплекс программ СУМРАК-ЕС, при создании которого автор являлся одним из ведущих разработчиков, прошёл экспертизу и был включён в Отраслевой фонд алгоритмов и программ (ОФАП САПР-ЛА), регистрационный номер №589.2069625.00001-01, что приравнивается к публикациям основных научных результатов научной деятельности. В 2005 г., в результате тестирования, сертификационным центром "ЦАГИ-ТЕСТ" было выдано свидетельство, удостоверяющее, что АРС ЭРА-ПК2000 является развитием СУМРАК-ЕС.

Объём и структура работы. Диссертация состоит из введения, четырёх глав, заключения и списка литературы из 79 наименований; содержит 103 страницы машинописного текста, 6 таблиц, 54 рисунка.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ.

Во введении даётся обзор работ, содержащих модели и аналитические методы, практика применения которых оказала влияние на выбор моделей при переходе к численным методам анализа. Указывается на то, что работы Дж. Аргириса и С. Келси являются одними из первых, посвящённых теории и практике расчётов на прочность фюзеляжей ЛА. Тем более, что модель, реализованная ими МКЭ на основе экстремума функционала Кастильяно, хорошо согласуется с предшествующими аналитическими схемами (схема Эбнера – Беляева). Однако эта конечно-элементная модель, несмотря на хорошие результаты, не нашла широкого распространения по ряду причин. В первую очередь, ввиду ограничений по виду конструкций, и, во вторую очередь, ввиду сложности математической части при реализации алгоритмов на ЭВМ. Высокую конкуренцию в этом вопросе, ввиду своей универсальности, занял МКЭ в перемещениях,

реализуемый на базе минимума функционала Лагранжа. Отсюда вытекает актуальность работы: реализация модели, близкой к модели Аргириса, Методом Конечных Элементов относительно перемещений. Далее приводится оценка научной новизны и практической значимости диссертации. Заканчивается введение кратким содержанием диссертации.

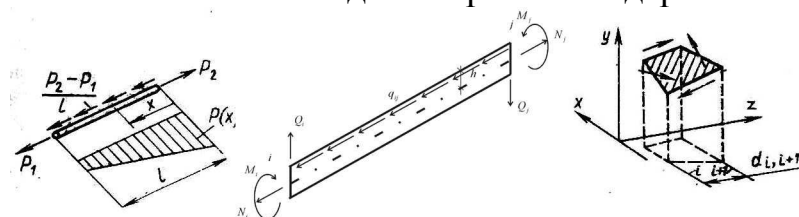


Рис. 1. Основные конечные элементы модели Аргириса.

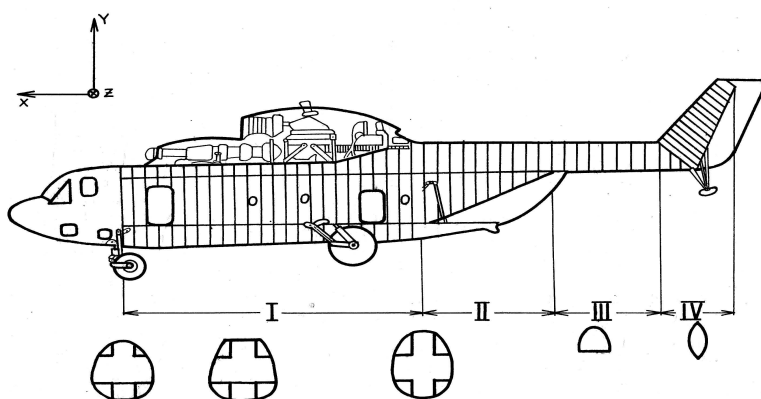


Рис. 2. Поперечные сечения фрагментов вертолѐта МИ-26.

В начале первой главы указывается на необходимость привлечения гибридной модели для моделирования четырёхузловых панелей сдвиговой обшивки с постоянным полем напряжений, в противном случае нарушаются дифференциальные уравнения равновесия в элементе. Известно, что гибридная модель формулируется на основе стационарности обобщѐнного функционала Кастильяно. Исходный функционал дополнительной энергии записывается в следующем виде:

$$\Pi_C = \sum \iiint_{V_a} B(\sigma_{ij}) dV_a - \iint_{S_u} T_i \bar{u}_i dS_u \quad (1)$$

Здесь: $B(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} \{\sigma\}^T [B] \{\sigma\}$ - функция дополнительной энергии деформации, $\{\sigma\}^T = [\sigma_{xx} \ \sigma_{yy} \ \sigma_{zz} \ \sigma_{xy} \ \sigma_{yz} \ \sigma_{xz}]$ вектор, характеризующий тензор напряжений, $[B]$ - соотношения упругости, $T_i = \sigma_{ij} n_j$, а n_j - направляющие косинусы внешней нормали границы элементов, S_u - область задания кинематических граничных условий. Функционал модифицированного принципа дополнительной энергии деформации Кастильяно получается по формуле:

$$\Pi_{MC} = \Pi_C - \sum G_{ab}, \quad (2)$$

где $G_{ab} = \iint_{S_{ab}} u_i (T_i^{(a)} + T_i^{(b)}) dS$ - условия сопряжения на межэлементных границах, добавленные с помощью неопределенных множителей Лагранжа u_i . В матричном виде для КЭ, занимающего область V_a , справедливо $\{\sigma\} = [P] \cdot \{\beta_i\}$, где $\{\sigma\}$ - вектор напряжений, $\{\beta_i\}$ - вектор неизвестных

параметров, $[P]$ - матрица аппроксимирующих функций. Усилия $\{S\}$ на границе S_{ab} КЭ выражаются через параметры $\{S\} = [R] \cdot \{\beta\}$.

Вектор перемещений на границе КЭ $\{u\} = [L] \cdot \{q_i\}$, где $\{q_i\}$ - вектор неизвестных узловых перемещений, $[L]$ - матрица интерполирующих функций. Тогда гибридная матрица податливости КЭ

$$[H] = \int_{V_a} [P]^T \cdot [B] \cdot [P] \cdot dv.$$

Трансформирующая матрица образуется интегрированием по границе $[T] = \int_{S_{ab}} [R]^T \cdot [L] \cdot ds$ и матрица жесткости конечного элемента определяется по формуле:

$$[K] = [T]^T \cdot [H]^{-1} \cdot [T] \quad (3)$$

Искомые параметры напряжений выражаются $[P] \cdot \{\beta\} = [P] \cdot [H]^{-1} \cdot [T] \cdot \{q_i\}$.

Далее рассматриваются конечные элементы простой формы с постоянным полем напряжений. Вывод гибридных матриц жёсткости для прямоугольного и треугольного элементов находит обобщение в выводе матрицы жёсткости для произвольного выпуклого плоского N-угольного элемента с постоянным сдвигом. Была рассмотрена в декартовой системе координат N-узловая, выпуклая по контуру, панель постоянной толщины t (рис. 3). Гибридная матрица податливости:

$$H = \int_V P^T B P dV = \frac{S_N (1 + \nu) t}{E},$$

где S_N - удвоенная площадь выпуклого N-угольника.

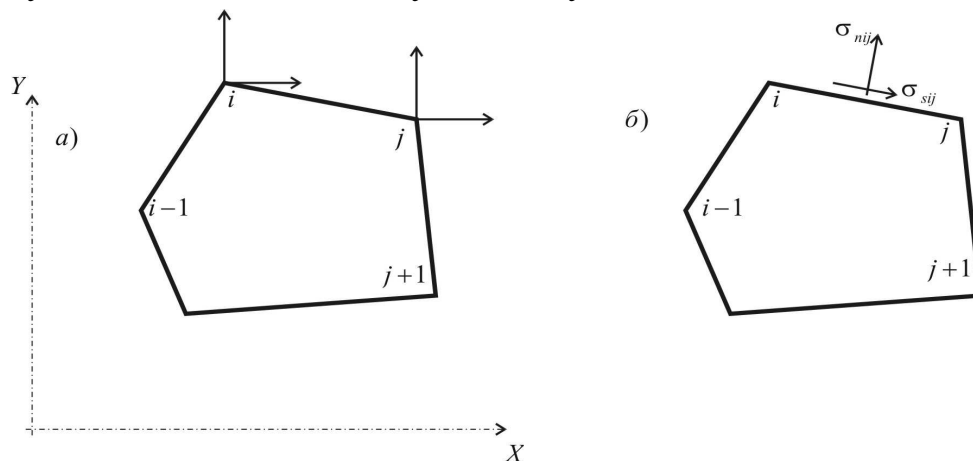


Рис. 3. N-узловой КЭ

Здесь E и ν - упругие характеристики материала, а выражение $S_N = \sum_{i=1}^{N-1} [-x_i y_{i+1} + x_{i+1} y_i] - x_N y_1 + x_1 y_N$ определяет удвоенную площадь выпуклого многоугольника через значения координат узлов фигуры в декартовой системе.

Трансформирующая матрица (связи обобщенных параметров напряжений и узловых сил) $T = \frac{t}{2} \cdot [x_{2n}; y_{n2}; x_{31}; y_{13}; \dots; x_{(i+1)(i-1)}; y_{(i-1)(i+1)}; \dots; x_{1(n-1)}; y_{(n-1)1}]$.

В частном случае, для четырехузловой сдвиговой панели записывается:

$$H = \frac{S_4(1+\nu)t}{E}; \quad H^{-1} = \frac{E}{S_4(1+\nu)t}; \quad T = \frac{t}{2} \begin{bmatrix} x_{24} & y_{42} & x_{31} & y_{13} & x_{42} & y_{24} & x_{13} & y_{31} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Далее в главе отмечается, что для включения в расчёты нерегулярных фрагментов в АРС ЭРА-ПК2000 при моделировании тонкостенных оболочек применяются и мембранные (плоско напряжённые) конечные элементы и плоские оболочечные (с 6-ю естественными степенями свободы в узле).

Поскольку современные конструкции фюзеляжей отходят от строгих цилиндрических или конических форм, при моделировании обшивки необходимо учесть возможность некомпланарности узлов четырехугольной панели. Применение сложных теорий, в которых учитывается изгиб, не оправдано. Здесь предлагается использовать на практике метод наименьших квадратов для уравнивания матриц жёсткости плоских КЭ. Этот подход позволяет применять на практике матрицы жёсткости элементов, полученных для проекций исходных закрученных на некоторую плоскость, добавлением минимальных уравнивающих сил.

Математически универсальный алгоритм "закрутки" жёсткости четырёхузловой панели заключается в следующем. Рассматривается панель в глобальной системе координат. На рис. 4 показаны самоуравновешенные реакции (столбец или строка матрицы жесткости) в узлах закрученного и исходного плоского КЭ. Для этих систем реакций записывается функционал метода наименьших квадратов в виде:

$$F = \sum_{i=1}^4 (P_{xi} - P'_{xi})^2 + \sum_{i=1}^4 (P_{yi} - P'_{yi})^2 + \sum_{i=1}^4 (P_{zi} - P'_{zi})^2 \quad (5)$$

С помощью неопределенных множителей Лагранжа добавляется в функционал (5) шесть уравнений равновесия для реакций закрученного элемента и получается:

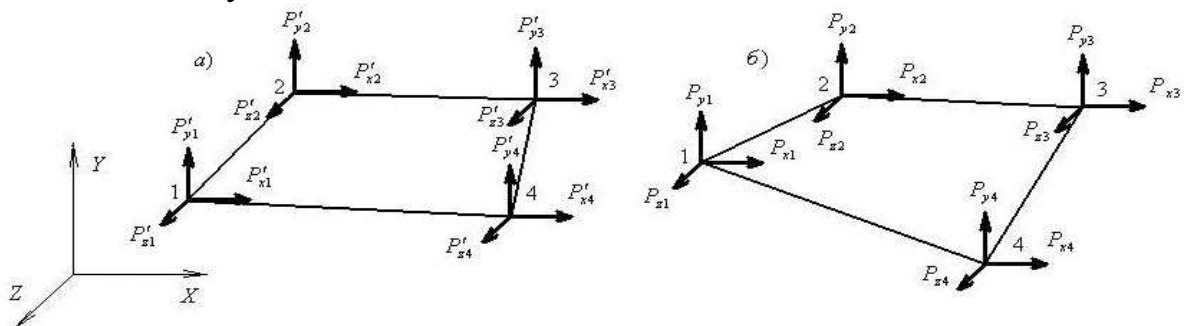


Рис. 4. Исходный а) и закрученный б) четырехузловые элементы в пространстве

$$F^{**} = \sum_{i=1}^4 (P_{xi} - P'_{xi})^2 + \sum_{i=1}^4 (P_{yi} - P'_{yi})^2 + \sum_{i=1}^4 (P_{zi} - P'_{zi})^2 + \lambda_1 \sum_{i=1}^4 P_{xi} + \lambda_2 \sum_{i=1}^4 P_{yi} + \lambda_3 \sum_{i=1}^4 P_{zi} + \lambda_4 \left(\sum_{i=1}^4 P_{zi} \cdot y_i - \sum_{i=1}^4 P_{yi} \cdot z_i \right) + \lambda_5 \left(\sum_{i=1}^4 P_{xi} \cdot z_i - \sum_{i=1}^4 P_{zi} \cdot x_i \right) + \lambda_6 \left(\sum_{i=1}^4 P_{yi} \cdot x_i - \sum_{i=1}^4 P_{xi} \cdot y_i \right) \quad (6)$$

Здесь x_i, y_i, z_i - координаты узлов закрученного элемента.

Вариации (6) по $P_{xi}, P_{yi}, P_{zi}, \lambda_i$ приводят к системе линейных уравнений в матричном виде: $S_0 \cdot R = R'$ и $R = \begin{bmatrix} P \\ \lambda \end{bmatrix}$; $R' = \begin{bmatrix} P' \\ 0 \end{bmatrix}$; Здесь λ , P и P' - вектора множителей Лагранжа, узловых сил закрученного элемента и узловых сил плоского элемента соответственно.

$$S_0 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} E_2 & 0 & 0 & 0 & E & S_1 \\ 0 & E_2 & 0 & 0 & E & S_2 \\ 0 & 0 & E_2 & 0 & E & S_3 \\ 0 & 0 & 0 & E_2 & E & S_4 \\ E & E & E & E & 0 & 0 \\ S_1^t & S_2^t & S_3^t & S_4^t & 0 & 0 \end{bmatrix};$$

E - единичная матрица 3×3 , $E_2 = E \cdot 2$;

$$S_i = \begin{bmatrix} y_i & 0 & -z_i \\ -x_i & z_i & 0 \\ 0 & -y_i & x_i \end{bmatrix}.$$

Универсальный алгоритм закрутки будет выглядеть следующим образом:

- 1) формируется K' - матрица жесткости плоского элемента в глобальной системе координат,
- 2) вычисляется S_0^{-1} и из нее выбирается подматрица S $[12 \times 12]$

$$S_0^{-1} = \begin{bmatrix} S & S_\lambda \\ S_\lambda^t & S_{\lambda\lambda} \end{bmatrix},$$

- 3) окончательно вычисляется матрица жёсткости закрученного КЭ
- $$K = S^t \cdot K' \cdot S.$$

Вторая глава посвящена КЭ рёбер подкреплённой оболочки. Указывается, что для правильного учёта работы шпангоутов необходимо учитывать в модели эксцентричность срединной поверхности тонкой обшивки и нейтральной оси шпангоутов. Поскольку в АРС ЭРА-ПК2000 расчётные узлы подкреплённых оболочек принято располагать на внешнем контуре шпангоутов, пренебрегая толщиной обшивки, процедуру учёта эксцентриситетов применяют к элементам шпангоутов. Она заключается в статически эквивалентном переносе матриц жёсткости из узлов, располагающихся на нейтральной оси, в узлы расчётной схемы.

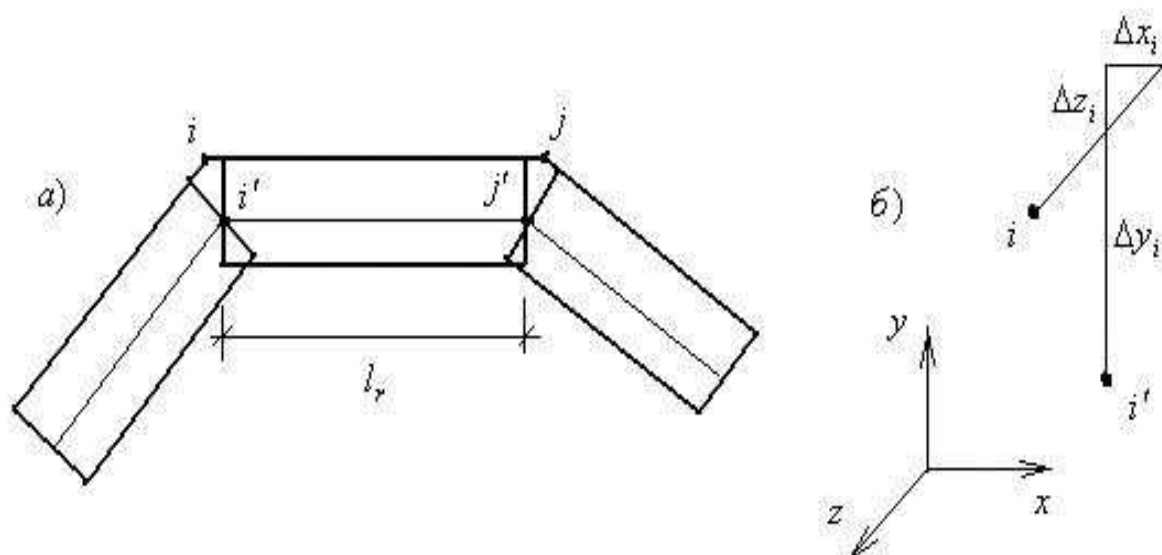


Рис. 5. Схема учёта эксцентриситетов

Рассматривается некоторый элемент шпангоута (рис. 5, а). Нейтральная ось КЭ расположена в точках i' и j' . Расчётные узлы конструкции в узлах i и j . На рис. 5, б для i го узла показаны эксцентриситеты в глобальной декартовой системе координат. Вводим следующие обозначения:

P_r и U_r - вектора усилий и перемещений в глобальной декартовой системе координат, соответствующие точкам на нейтральной оси двухузлового элемента; P_{re} и U_{re} - вектора усилий и перемещений в глобальной системе координат, соответствующие узлам расчётной схемы. В матричном виде для всего двухузлового элемента:

$$P_{re} = C_e \cdot P_r; \quad U_{re} = \bar{C}_e \cdot U_r$$

Здесь C_e , \bar{C}_e - матрицы “эксцентриситетов” – трансформирующие матрицы.

Справедливо и обратное: $P_r = C_e^{-1} P_{re}$ и $U_r = (\bar{C}_e)^{-1} U_{re}$. При этом справедливо $C_e^{-1} = \bar{C}_e^T$. После преобразований получаем $K_{re} = C_e \cdot K_r \cdot C_e^T$

В конструкции фюзеляжа имеются изгибаемые элементы, к которым обшивка примыкает как по нижней, так и по верхней полке сечения шпангоута. Для этих случаев предлагается четырёхузловой макроэлемент балка – стенка, построенный суперпозицией четырёхузловой стенки и двух балочных поясов с эксцентриситетом. Эквивалентность изгибаемой балки четырёхузлового элемента определяем равенством геометрических характеристик: площади и изгибающих моментов инерций (рис. 6). Для моделирования четырёхузловой стенки был принят плоский трёхузловой КЭ оболочки, полученный суперпозицией КЭ изгибаемой тонкой пластины и плосконапряжённого КЭ Бергана. Мембранное состояние было принято после тестирования нескольких прочих КЭ.

Далее предлагается двухузловой КЭ шпангоута переменного сечения. Рис. 6 так же послужил для выбора законов аппроксимации геометрических характеристик по оси элемента. Для получения искомой матрицы жёсткости сначала строится матрица податливости δ 6-го порядка для

консольной балки переменного по длине сечения. Окончательную матрицу жёсткости получим по формуле $K = B' \cdot [\delta]^{-1} \cdot B$. Здесь B - матрица равновесия.

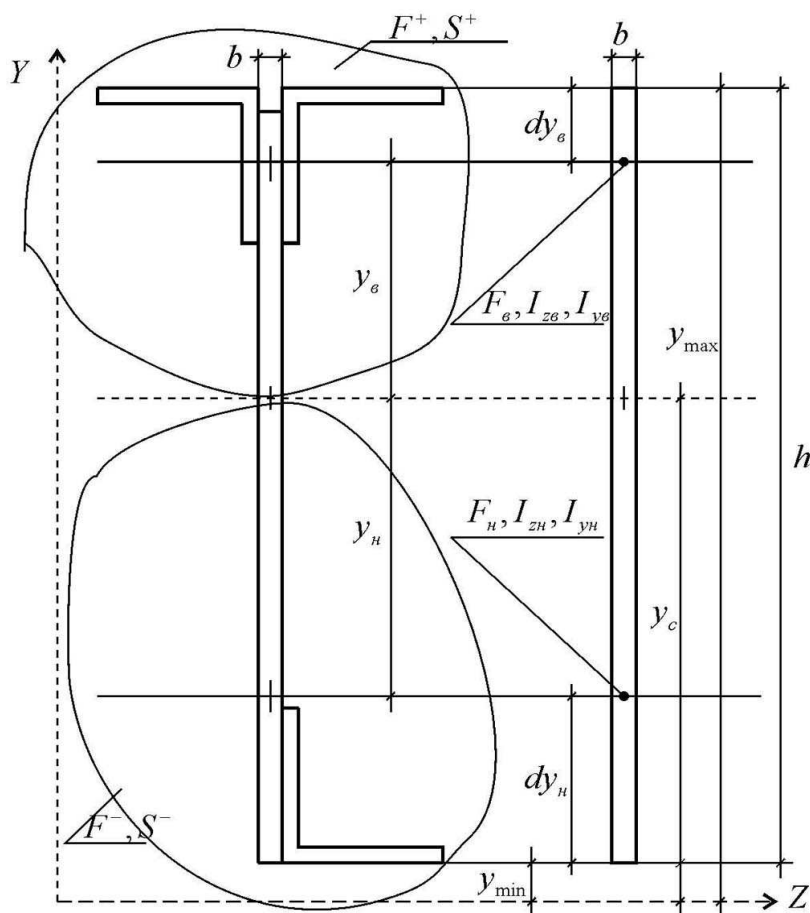


Рис. 6. Сечение изгибаемого элемента и эквивалентного ему сечения макроэлемента балка-стенка

На основе макроэлемента балка – стенка предлагается соединительный элемент, позволяющий применять в расчётной схеме одновременно и балки с эксцентриситетом и двухпоясные макроэлементы. На рис. 7. показан вариант такого соединения.

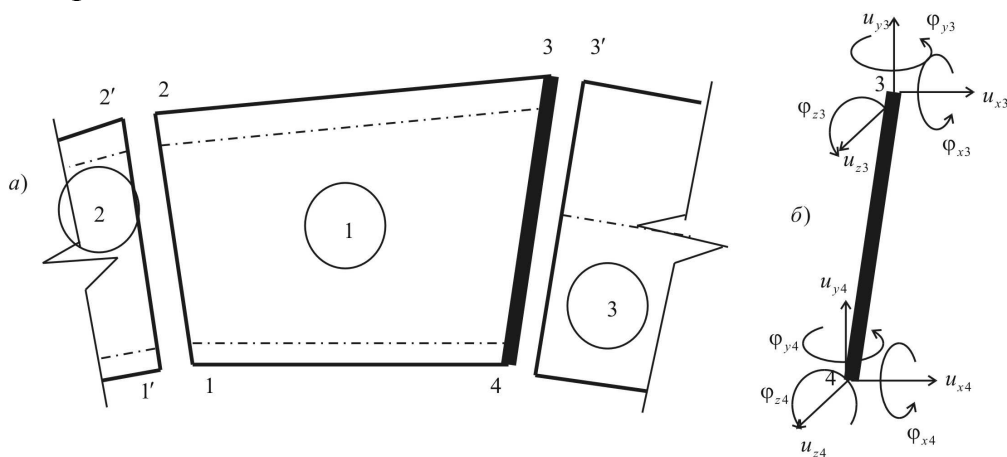


Рис. 7 а) Схема связи трех элементов; б) Узловые перемещения в элементной системе координат ребра 3-4

В соответствии с гипотезой плоских сечений, применённой при формулировках для КЭ 2, полагаем ребро 3-4 элемента 1 (рис. 7.а) абсолютно жёстким. Для решения этой задачи предлагается два способа: первый способ основан на подключении к стандартным выражениям МКЭ ($K \cdot U = F$) дополнительных уравнений связи с помощью неопределённых множителей Лагранжа. Геометрически, с точностью до знака, уравнения связи выглядят следующим образом (по рис. 7, б): $u_{x4} - u_{x3} - \varphi_{z3} y_{34} = 0$, $u_{y4} - u_{y3} + \varphi_{z3} x_{34} = 0$, $u_{z4} - u_{z3} + \varphi_{x3} y_{34} - \varphi_{y3} x_{34} = 0$, $\varphi_{x4} - \varphi_{x3} = 0$, $\varphi_{y4} - \varphi_{y3} = 0$, $\varphi_{z4} - \varphi_{z3} = 0$.

Порядок матрицы жёсткости увеличится за счёт неизвестных множителей Лагранжа на шесть, однако с помощью алгоритма статической конденсации мы можем исключить подматрицы, содержащие жёсткость 4-го узла и уравнения связи, образовав при этом матрицу жёсткости 18-го порядка, подлежащую включению в полную матрицу жёсткости.

Другой алгоритм основан на уже известном, описанном нами, способе статически эквивалентного переноса жёсткости (рис. 5). Перенос жёсткость 4-го узла в точку с координатами 3-го узла, просто добавляем полученные все новые, за исключением взаимной, жёсткости 4-го к 3-ему, получая, таким образом, матрицу жёсткости 18-го порядка некоторого трёхузлового КЭ. Для реализации принят второй вариант.

Следует отметить, что в АРС ЭРА-ПК2000, на базе прежних разработок, автором реализован алгоритм вычисления геометрических характеристик сечений шпангоутов в формате, унифицированном для всех предложенных элементов.

Основным недостатком МКЭ в перемещениях является разрывность полей напряжений. На практике это выражается в том, что при формальном построении эпюр внутренних усилий в соответствии с алгоритмом метода перемещений, в узлах наблюдаются перепады в значениях. Для того, чтобы получать приемлемую картину напряженного состояния для моделей подкреплённых оболочек, предложен практический алгоритм статической адаптации. Он заключается в предписании равновесной работы между элементами оболочек с рёбрами. На рис. 8 показан ферменный элемент, сопряжённый двум элементам сдвиговых панелей. Усилия в узлах i и j являются суммой усилий от всех трёх элементов и потому, при построении эпюр продольных усилий, разрывов не будет.

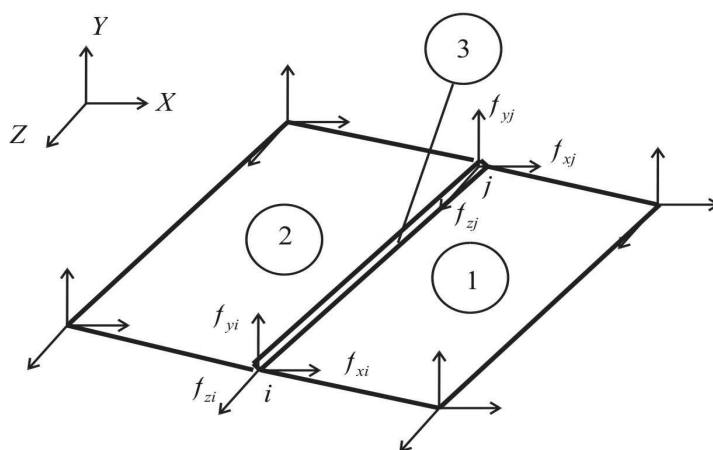


Рис. 8. Ферменное ребро с сопряжёнными сдвиговыми панелями

Если провести по элементам панелей сечения, параллельные ребру, получим картину, соответствующую модели Эбнера – Беляева (рис. 9). В общем случае, независимо от вида подкрепляющего ребра (шпангоут, двухпоясной макроэлемент или стрингер), получаем рёбра, уравниваемые потоком сдвига от обшивки (рис. 10).

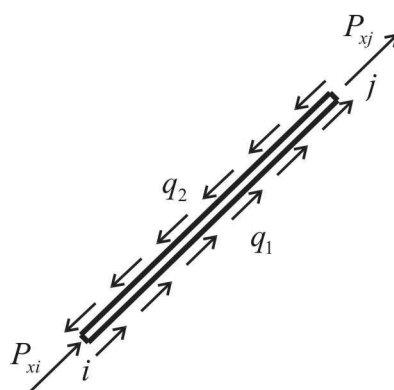


Рис. 9. Элемент ферменного ребра с усилиями после статической адаптации

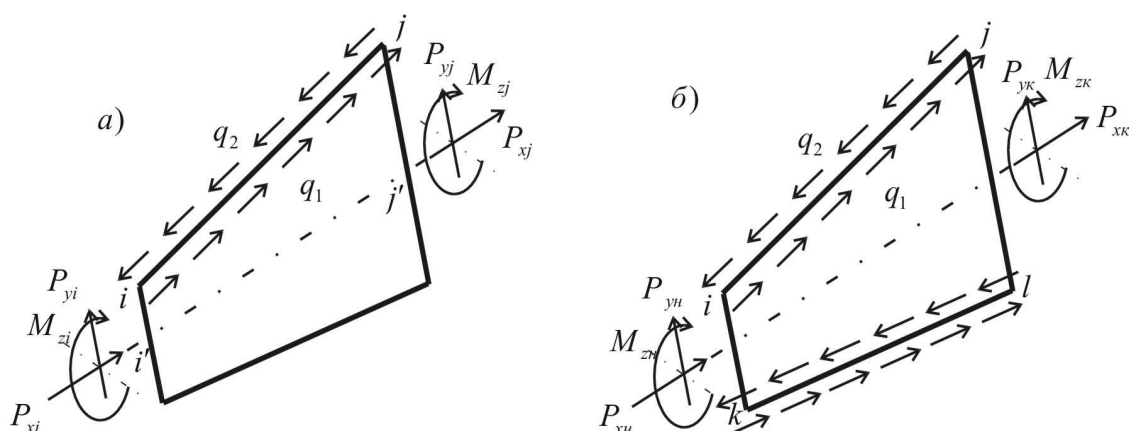


Рис. 10. Статическая адаптация усилий в изгибаемых рёбрах

Усилия в рёбрах после статической адаптации имеют вид:

$$S = S_0 + f_1(q_1) + f_2(q_2), \quad (7)$$

однако необходимо уточнить вид функций.

Далее приводятся результаты тестовых примеры, подтверждающих работоспособность предложенных во второй главе элементов и методов.

В третьей главе, с целью уточнения положения (7), рассматривается дискретная модель плоской, подкреплённой по контуру панели (рис. 11). Идеализация дискретных элементов: в панели действует постоянное поле напряжения сдвига в некоторой декартовой системе координат; в подкрепляющих стержневых элементах действуют усилия растяжения – сжатия, находящиеся в равновесии с усилием (поток) сдвига, образуемым напряжениями по наклонной площадке.

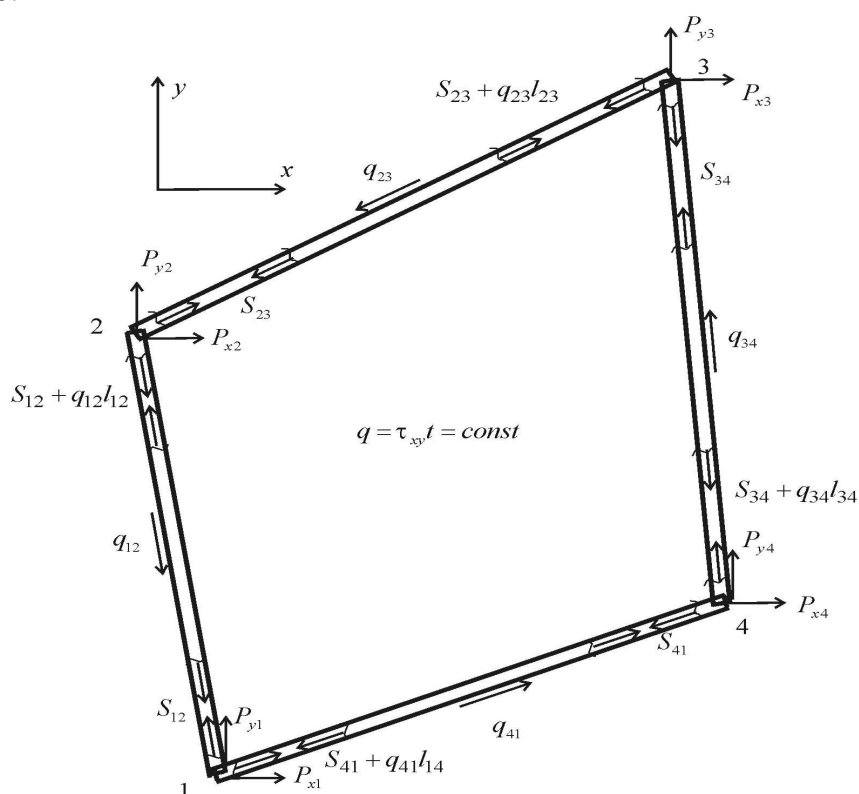


Рис. 11. Дискретная модель подкреплённой панели

$S = \{S_{12} \ S_{23} \ S_{34} \ S_{41} \ q\}$ - базисный вектор, описывающий напряжённое состояние подкреплённой панели. Вводим вектора внешних узловых сил и перемещений:

$$P = \{P_{x1} \ P_{y1} \ P_{x2} \ P_{y2} \ P_{x3} \ P_{y3} \ P_{x4} \ P_{y4}\},$$

$u = \{u_{x1} \ u_{y1} \ u_{x2} \ u_{y2} \ u_{x3} \ u_{y3} \ u_{x4} \ u_{y4}\}$. Запишем для модели полную систему уравнений строительной механики:

$$A \ S + P = 0 \quad (8)$$

$$A^T \ u + B \ S = 0 \quad (9)$$

Здесь: $A_{[8 \times 5]}$ - матрица узлового равновесия усилий, $B_{[5 \times 5]}$ - матрица внутренней податливости. Выразив S из (8), и подставив в (9), получим:

$$- A_{[8 \times 5]} B_{[5 \times 5]}^{-1} A_{[5 \times 8]}^T u + P_{[8 \times 1]} = 0 \quad (10)$$

Обозначаем $K_{[8 \times 8]} = A_{[8 \times 5]} B_{[5 \times 5]}^{-1} A_{[5 \times 8]}^T$ - матрицу жёсткости КЭ сдвиговой подкреплённой панели. Коэффициенты матрицы податливости получаем, варьируя полную энергию деформации по компонентам базиса S . Энергия деформации для рассмотренной панели запишется:

$$\mathcal{E} = \sum_{ij} \frac{l_{ij}}{6EF_{ij}} (3s_{ij}^2 + 3s_{ij}q_{ij}l_{ij} + q_{ij}^2l_{ij}^2) + \frac{S_{1234}}{4tG}$$

$S_{1234} = x_{42}y_{31} - x_{31}y_{42}$ - удвоенная площадь четырехугольной панели, t - толщина, E и G - модули упругости и сдвига материала. Получаем матрицу внутренней податливости вида:

$$B_{[5 \times 5]} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 & b_{15} \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 & b_{25} \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 & b_{35} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} & b_{45} \\ b_{51} & b_{52} & b_{53} & b_{54} & b_{55} \end{bmatrix}$$

Заметим, что b_{i5} характеризуют взаимную работу компонент исходного базиса. Вводим для удобства безразмерную координату $\xi \in [0,1]$. Тогда полное усилие в ребре $i-j$ после решения (10) в компонентах исходного базиса будет иметь вид: $S_{ij} + q_{ij}l_{ij}\xi$. Рассмотрим некоторый новый базис $S^* = \{S_{12}^*, S_{23}^*, S_{34}^*, S_{41}^*, q\}$. Связь нового и старого базисов определяем из равенства $S_{ij} + q_{ij}l_{ij}\xi = S_{ij}^* + S_{ij0} + q_{ij}l_{ij}\xi$. S_{ij0} - некоторая, пока неизвестная, величина того же порядка, что и S_{ij} . В данном случае и S_{ij} и S_{ij0} - величины постоянные. Запишем энергию деформации одного стержня в новом базисе относительно ξ :

$$\mathcal{E}_{ij} = \frac{l_{ij}}{2} \int_0^1 \frac{(S_{ij}^* + S_{ij0} + q_{ij}l_{ij}\xi)^2}{EF_{ij}} d\xi = \frac{l_{ij}}{2EF_{ij}} \int_0^1 (S_{ij}^*)^2 d\xi + \frac{l_{ij}}{EF_{ij}} \int_0^1 S_{ij}^*(S_{ij0} + q_{ij}l_{ij}\xi) d\xi + \frac{l_{ij}}{2EF_{ij}} \int_0^1 (S_{ij0} + q_{ij}l_{ij}\xi)^2 d\xi \quad (11)$$

Здесь слагаемые интегралы сгруппированы так, чтобы выделить S_{ij}^* . А S_{ij0} отнесено к равновесной составляющей. Тогда средний интеграл имеет смысл взаимной работы компонент нового базиса. Потребуем его равенство 0, откуда и получим: $S_{ij0} = -\frac{q_{ij}l_{ij}}{2}$. Матрица податливости в новом базисе:

$$B_{[5 \times 5]} = \begin{bmatrix} b_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55} \end{bmatrix}$$

Диагональная матрица податливости позволяет получать полную матрицу жёсткости простым сложением вкладов от отдельных элементов. В новом базисе дискретная модель обрела смысл конечно-элементной модели. При этом жёсткости рёбер - это жёсткости ферменных КЭ, а жёсткость пластины получена с учётом равновесной работы с рёбрами. Далее проводится обобщение на случаи изгибаемых рёбер с эксцентриситетом нейтральной оси со срединной плоскостью обшивки. Рассмотрен случай закрученной панели и рёбер с переменной по длине жёсткостью. Завершают главу 3 численные примеры с простым физическим смыслом, иллюстрирующие работу равновесного элемента. Проводится сравнение по результатам, полученным совместными элементами и статической адаптацией результатов. Максимальная разность в перемещениях по разным моделям достигала 11.5 %.

В четвёртой главе описываются практические задачи, решённые с применением приведённых разработок, приводятся примеры сопоставительных расчётов.

Первое применение алгоритма статической адаптации было при сопоставительных расчётах конструкции базовой модели вертолёт МИ8МТ и моделей вертолёт МИ8МПС и МИ8МТРАВ (рис. 12), по заказу КНПП "Вертолёт МИ".

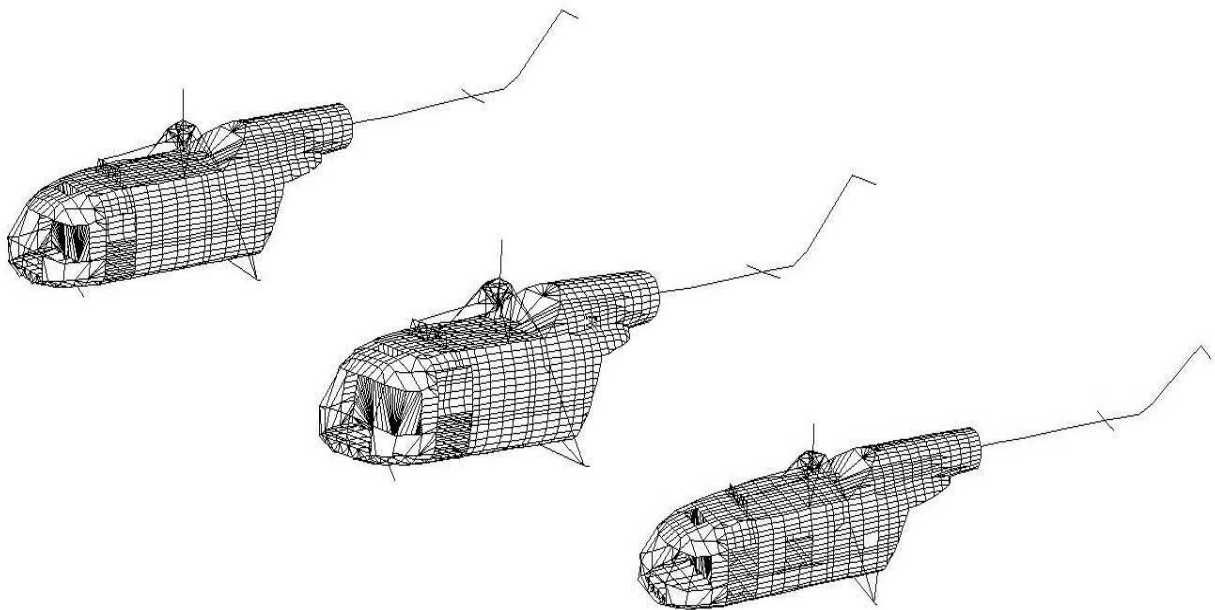


Рис. 12. Расчётные модели вертолёт МИ8МТ, МИ8МПС и МИ8МТРАВ

Результаты расчётов приводились в виде таблиц соответствующих напряжений с максимальными по модулю значениями, как в рёбрах, так и в обшивке (рис. 13).

Максимальные по модулю значения нормальных напряжений в эффективных поясах в кг/мм ² . МИ-8МТ - Правый борт.									Максимальные по модулю касательные напряжения в полях обшивки в кг/мм ² . МИ-8МТ - Правый борт.								
1	2	2a	3	4	5	6	7	8	1	2	2a	3	4	5	6	7	8
7п									7п	1.61(02)	3.28(02)	1.35(03)	2.94(04)	2.92(04)	3.37(04)	7.30(04)	4.28(02)
8п	0.37(04)	-0.93(14)	-1.07(14)	1.03(02)	2.56(02)	3.30(02)	2.51(02)	2.52(03)	8п	1.52(02)	2.82(02)	1.94(03)	3.54(04)	3.16(04)	4.40(04)	6.79(04)	4.17(02)
9п	0.54(02)	0.58(13)	0.56(13)	1.08(04)	2.42(02)	2.21(02)	1.20(03)	1.69(03)	9п	1.47(02)	2.22(02)	2.07(04)	4.09(04)	3.30(04)	4.68(04)	6.30(04)	3.49(02)
10п	0.60(02)	0.77(13)	0.77(13)	1.27(04)	-1.06(02)	0.64(01)	-0.93(04)	1.18(01)	10п	1.60(02)	1.79(02)	1.77(04)	4.63(04)	3.18(04)	4.53(04)	5.62(04)	3.13(08)
11п									11п	2.31(02)	1.28(02)	1.28(02)	4.69(04)	2.68(04)	5.03(02)	5.32(03)	3.07(08)
12п	0.46(04)	2.54(04)	2.54(04)	1.02(14)	-0.18(04)	-0.54(04)	-0.71(04)	1.00(01)	12п	2.89(02)	3.34(03)	3.34(03)		4.51(02)	4.77(03)	4.75(03)	2.96(08)
13п	0.84(02)							1.06(09)	13п	2.96(02)	3.19(02)	3.19(02)		4.32(02)	4.98(03)	4.78(03)	2.64(08)
14п	0.40(04)	0.41(02)	0.41(02)		0.20(14)	-0.45(04)	-0.59(04)	-0.19(09)	14п	3.07(02)	2.98(02)	2.98(02)		4.26(03)	4.93(03)	4.57(03)	2.26(08)
15п	0.17(08)	0.24(14)	0.24(14)		0.30(14)	0.53(14)	0.62(14)	-1.27(09)	15п	3.03(02)	2.96(02)	2.96(02)		4.28(03)	4.81(03)	4.47(03)	1.89(08)
16п	-0.29(02)				0.97(02)	0.80(14)	0.69(14)	-1.32(09)	16п	2.87(03)	3.01(02)	3.01(02)		4.38(03)	4.61(03)	4.32(03)	1.56(08)
17п	-0.55(02)	-0.43(02)	-0.43(02)		1.02(14)	-0.99(02)	-1.31(09)		17п	2.64(03)	3.29(02)	3.29(02)		4.48(03)	4.22(03)	4.20(03)	1.20(08)
17а	-0.65(02)				1.15(14)	1.12(14)	-2.12(02)	-2.46(02)	17а	2.22(03)	3.55(02)	3.55(02)		4.95(03)	3.65(03)	4.03(03)	1.03(10)
18п	0.67(14)				1.35(14)				18п	2.02(03)	1.34(03)	1.34(03)	5.10(02)	2.08(03)	3.34(03)	3.66(03)	0.81(10)
19п									19п	1.61(03)	1.62(03)	1.62(03)	5.45(02)	2.22(03)	2.62(03)	3.34(03)	0.74(01)
20п	0.50(12)	0.85(14)	0.85(14)	1.01(14)	-1.59(02)	-1.68(02)	-2.53(02)	-2.85(02)	20п	1.36(03)	1.82(03)	1.82(03)	5.06(02)	2.34(03)	2.28(03)	2.73(03)	0.78(09)
21п	0.59(12)	0.80(14)	0.80(14)	0.98(02)	-2.00(02)	-2.04(02)	-2.66(02)	-3.01(02)	21п	1.16(12)	2.01(03)	2.01(03)	4.21(02)	2.49(03)	2.10(03)	2.07(03)	0.98(09)
22п	0.51(12)	0.58(14)	0.58(14)	2.53(02)	4.36(02)	5.06(02)	3.73(02)	4.87(03)	22п								

Рис. 13. Пример представления результатов расчётов натурных изделий

В рамках хоздоговорных работ с ОАО "Казанский вертолётный завод" проводились статические и динамические исследования вертолётов МИ8МТВ5 и различных модификаций АНСАТ (рис. 14).

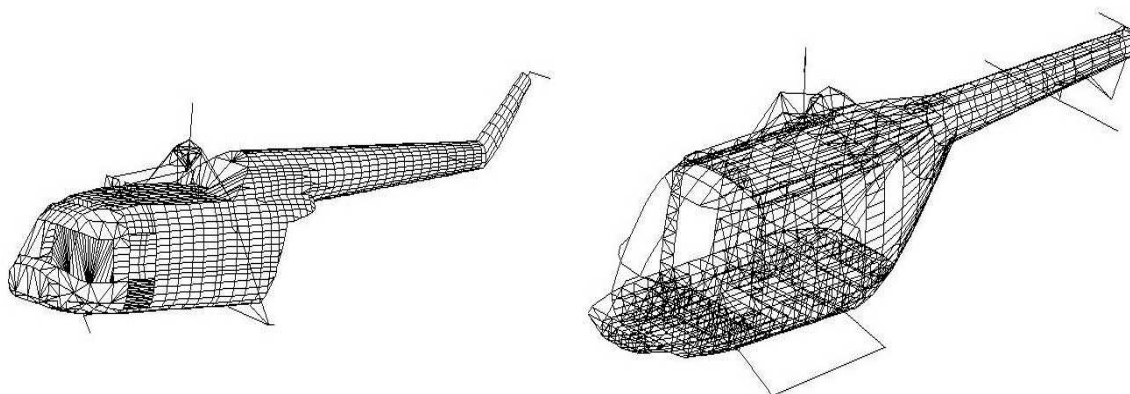


Рис. 14. Расчётные модели вертолётов МИ8МТВ5 и АНСАТ

Динамический анализ в АРС ЭРА-ПК2000 не ограничен определением частот и форм собственных колебаний. В АРС ЭРА-ПК2000 усилиями автора реализован метод сложения форм колебаний на основе модели МКЭ. Необходимым условием формулировки динамического отклика модели в нормальных координатах является строгая ортогональность форм и, конечно, процедура нормирования. Для любых m -ой и n -ой форм должны выполняться условия: $\varphi_n^T m \varphi_n = 1$ и $\varphi_m^T m \varphi_n = 0$. Здесь m - матрица масс, φ_i - i -я форма. При установившихся колебаниях от действия гармонической вынуждающей нагрузки по закону синуса выражение для амплитуд в нормальных координатах с учётом демпфирования принимает вид:

$$y_n(t) = \frac{P_n}{\omega_n^2} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2} \left[(1 - \beta^2) \sin \bar{\omega} t - 2\xi_n \beta \cos \bar{\omega} t \right]$$

Здесь $p_n(t) = \varphi_n^T p(t)$, ξ_n - коэффициент демпфирования n -ой формы, ω_n - круговая частота n -ой формы, $\beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega_n}$, $\bar{\omega}$ - круговая частота вынуждающей нагрузки. Полные узловые перемещения во времени:

$$v(t) = \varphi_1 y_1(t) + \varphi_2 y_2(t) + \varphi_3 y_3(t) + \dots$$

На рис. 15. приведены графики зависимости амплитуд колебания расчётного узла модели вертолётА АНСАТ от изменения вынуждающей частоты, прикладываемой на втулке несущего винта по закону синуса.

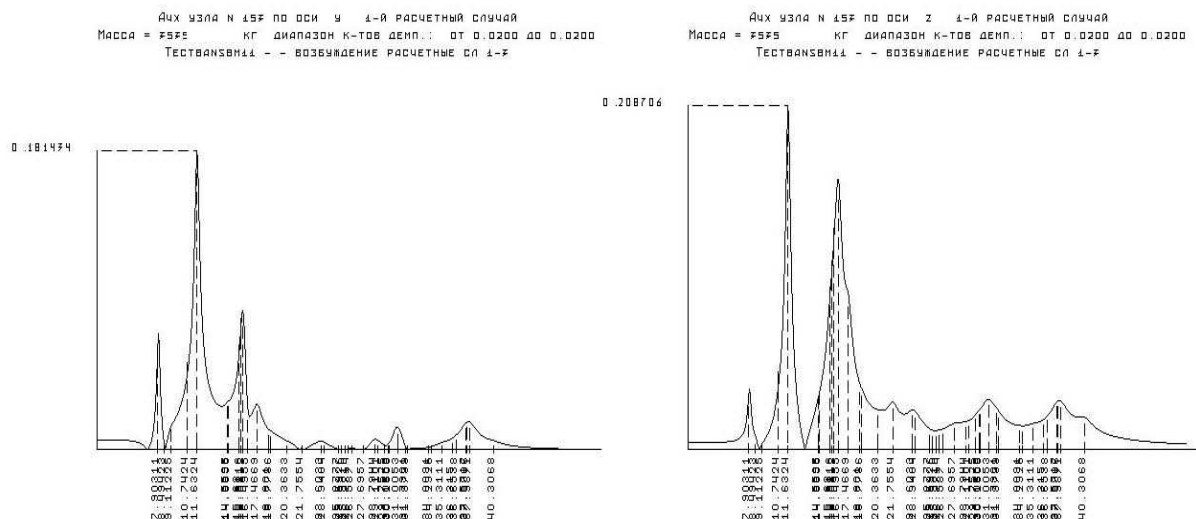


Рис. 15. Графики амплитудно – частотных характеристик узла 153

В завершении приводятся результаты сравнения по перемещениям и напряжениям расчётов модели трёхслойной оболочки в АРС ЭРА-ПК2000 и расчётным комплексом Ansys. На рис. 16 показаны в масштабе деформированные состояния модели. Рассматривалось три варианта

нагружения: а) сосредоточенная единичная сила приложена в вертикальной плоскости симметрии нормально к поверхности; б) распределённая нагрузка, приложенная в вертикальной плоскости вдоль образующей по всей длине; в) равномерное внешнее давление. Граничные условия – заземление торца.

Тестирование проводилось для проверки эффективности КЭ трёхслойной панели на базе гибридной постановки, адаптированного автором в АРС ЭРА-ПК2000. На рис. 17, 18 приведены результаты сравнения по перемещениям и напряжениям вдоль верхней образующей.

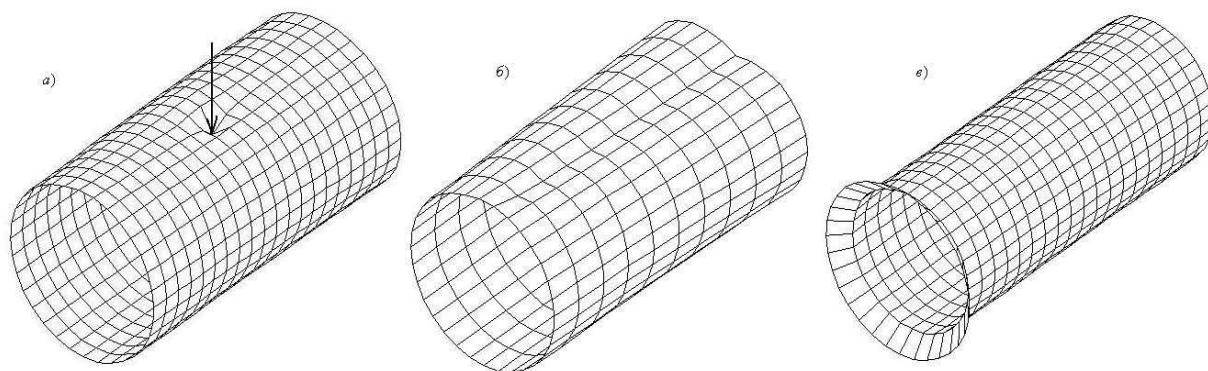


Рис. 16. Тестовые нагрузки трёхслойной оболочки

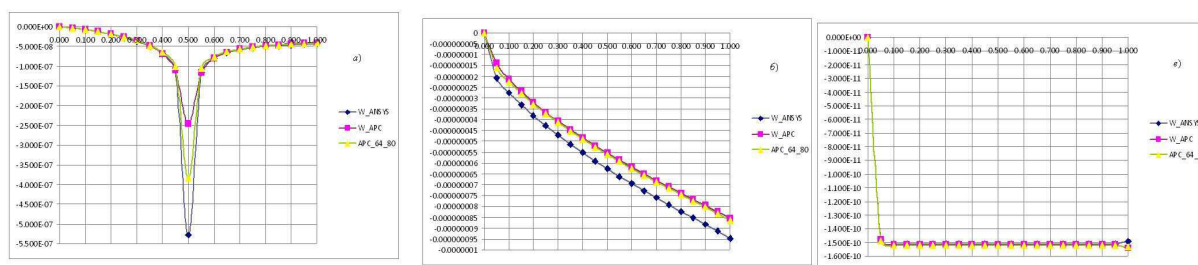


Рис. 17. Сравнение по перемещениям

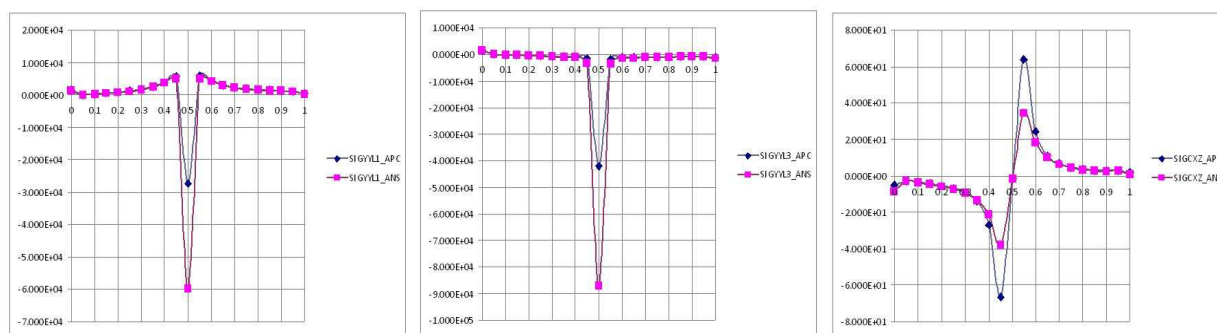


Рис. 18. Сравнение по напряжениям для первого нагружения

На рис. 18,а и 18,б показаны эпюры нормальных напряжений вдоль образующей в наружном и внутреннем слоях. На рис. 18,г – касательные напряжения в срединном слое. Разница объясняется тем, что жёсткость оболочки в АРС ЭРА-ПК2000 смоделирована без учёта обжатия слоёв.

В диссертационной работе получены следующие результаты:

1). Получен универсальный конечный элемент, реализующий напряжения постоянного сдвига в некоторой декартовой системе координат.

2). Предложен универсальный алгоритм, позволяющий применять плоские мембранные и сдвиговые конечные элементы при моделировании закрученной обшивки ребристых оболочек.

3). Получен набор конечных элементов, позволяющих моделировать изгибаемые рёбра сложных по форме подкреплённых оболочек.

4). Предложен практический алгоритм статической адаптации усилий в рёбрах, позволяющий трактовать результаты анализа прочности ребристых оболочек в соответствии со схемой Эбнера – Беляева.

5). Получен конечный элемент тонкой сдвиговой обшивки, точно учитывающий энергию взаимодействия с ребрами.

6.) Все предложенные разработки реализованы в рамках расчётного комплекса АРС ЭРА-ПК2000.

СПИСОК РАБОТ, ОПУБЛИКОВАННЫХ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Рецензируемые научные журналы, рекомендуемые ВАК:

1. Абдюшев А.А. Принцип построения расчетной модели равновесных с ребрами подкрепленных оболочек для линейного анализа МКЭ в перемещениях. // Известия ВУЗов. Авиационная техника. 2013, №2. с. 8-14.

Монографии:

2. Лукашенко В.И., Абдюшев А.А., Доронин М.М., Нуриева Д.М., Сладков А.В. Экспертиза, расчет, анализ пространственных конструкций. АРС ЭРА-ПК2000. - Казань: Изд-во КГАСУ, 2006. 320с.

Прочие издания:

3. Абдюшев А.А. (соавторы Бурман З.И., Кордончик Д.М.) Суперэлементный расчёт подкреплённых оболочек на прочность, устойчивость и собственные колебания // Тез. Докл. Всесоюзной конференции "КОРПУС-83"/ - Николаев, 1983. - с. 48.

4. Абдюшев А.А. (соавторы Бурман З.И., Кордончик Д.М.) Анализ прочности, устойчивости и собственных колебаний подкреплённых оболочек методом суперэлементов // Тез. Докл. III Национальной конференции по устойчивости и колебаниям деформируемых систем. – София, НРБ, 1984. – с.4.

5. Абдюшев А.А. (соавторы Бурман З.И., Кордончик Д.М.) Анализ прочности, устойчивости и собственных колебаний сложных конструкций суперэлементным методом // Тез. Докл. IX Дальневосточной научно-

технической конференции по повреждениям и эксплуатационной надёжности судовых конструкций. – Владивосток, 1984. – с.192-194.

6. Абдюшев А.А. (соавторы Бурман З.И., Кордончик Д.М.) Программный комплекс для конечно-элементных расчётов конструкций с использованием различных вариационных принципов. Тезисы докладов V всесоюзной конференции по статике и динамике пространственных конструкций. Киев КИСИ 1985.

7. Абдюшев А.А. (соавторы Бурман З.И., Десятник Г.А., Кордончик Д.М.) Опыт применения пакета прикладных программ "Суперэлементный метод расчёта авиационных конструкций" и его совершенствование // Прочность конструкций летательных аппаратов: Межвузовский сб. – Казань: КАИ, 1986. – с.79-84.

8. Абдюшев А.А. (соавторы Артюхин Г.А., Зархин Б.Я., Кордончик Д.М., Лукашенко В.И., Шаихов И.А.) Пакет прикладных программ "СУМРАК" для расчётов на статику, собственные и вынужденные колебания тонкостенных комбинированных конструкций. Тезисы докладов II Всесоюзной конференции "Численная реализация физико-механических задач прочности", Горький, 1987.

9. Абдюшев А.А. (соавторы Бурман З.И., Кордончик Д.М., Шаихов И.А.) Программный комплекс для конечноэлементных прочностных статических и динамических расчётов конструкций и сооружений с использованием различных вариационных принципов. Тезисы. XI международный конгресс по вопросам применения математики в технических науках. Веймар, ГДР, т.2, 1987. – с.13-15.

10. Абдюшев А.А. Об одной несовместимости конечноэлементной модели для расчёта на прочность подкреплённых оболочек типа фюзеляжа ЛА. Внутрикамерные процессы в энергетических установках. Акустика, диагностика. Тезисы докладов и сообщений на 4-м научно-техническом семинаре. - КВВКУ РВ, 1992.

11. Абдюшев А.А. Численный подход при конечно-элементном анализе напряжённого состояния элементов шпангоута с учётом их равновесия с обшивкой. Тезисы докладов 51 республиканской научной конференции. - Казань, КГАСА, 1999.

12. Абдюшев А.А. Набор программ для динамического анализа конструкций от вынуждающих нагрузок, имеющих гармонический характер. Тезисы докладов 52 республиканской научной конференции. Казань, КГАСА, 2000.

13. Абдюшев А.А. (соавтор: Доронин М.М.) Реализация алгоритма определения динамических реакций конструкций в упругой стадии при произвольном нагружении. Графическая подсистема ППП ЭРА-ПК2000 визуализации результатов динамического анализа. //Материалы 53 республиканской научной конференции. Сборник научных трудов аспирантов. - Казань, КГАСА, 2001. - с. 43-49.

14. Абдюшев А.А. Матрица жёсткости конечного элемента шпангоута ЛА с линейно изменяющейся высотой сечения с учётом переменности по

длине угла ориентации главных центральных осей. Тезисы докладов 54 республиканской конференции. - Казань, КГАСА, 2002.

15. Абдюшев А.А. Двухпоясной конечный элемент, интерпретирующий работу шпангоута большой строительной высоты. Тезисы докладов 57 республиканской научной конференции. - Казань, КГАСУ, 2005.

16. Абдюшев А.А. Моделирование подкрепленной оболочки в АРС ЭРА-ПК2000. Известия КазГАСУ. - Казань: Изд-во КГАСУ, №2(8)/2007 г., стр. 26-34.

Свидетельства о регистрации программ:

1. Свидетельство регистрации расчётного комплекса СУМРАК-ЕС фонда алгоритмов и программ (ОФАП САПР-ЛА), регистрационный номер №589.2069625.00001-01.

2. Свидетельство, удостоверяющее о том, что АРС ЭРА-ПК2000 является развитием СУМРАК-ЕС, выдано 10.11.2005 года сертификационным центром "ЦАГИ-ТЕСТ", аттестат аккредитации Сертификационного центра №СЦ-017 Авиационного Регистра МАК.